Hermite-Jacobi再生核の計算代数解析 (再生核の理論の応用)

田島, 慎一; 中村, 弥生

数理解析研究所講究録 1352 巻 2004 年 1-10

Hermite-Jacobi 再生核の計算代数解析*

新潟大学工学部 田島慎一 (Shinichi Tajima)
Faculty of Engineering, Niigata University †
お茶の水女子大学大学院 中村弥生 (Yayoi Nakamura)
Ochanomizu University ‡

1 序

$X=\mathbb{C}^n$ 上の n 個の正則関数 $f_1(x),\ldots,f_n(x)\in\mathcal{O}_X$ の列 $\mathcal{F}=\{f_1,\ldots,f_n\}$ であり, 正規列をなすものが与えられたとする. 正則関数 $\varphi(x)\in\mathcal{O}_X$ に対し, 次の Hermite-Jacobi 積分

$$K_{\mathcal{F}}(\varphi)(y)=(\frac{1}{2\pi i})^n\int\cdots\int\frac{Q(x,y)}{f_1(x)\ldots f_n(x)}\varphi(x)dx$$

を対応させる積分変換 $K_{\mathcal{F}}$ を考える. ここで, $Q(x,y)$ は, 各 f_i に対する Hefer 分解

$$f_i(x)-f_i(y)=\sum_{j=1}^{n}q_{ij}(x,y)(x_j-y_j)$$

に対し, その係数行列 $(q_{ij}(x,y))_{i,j}$ の行列式

$$Q(x,y)=\det((q_{ij}(x,y))_{i,j})$$

を取ることで定められる正則関数であり, 積分は, $f_1,\ldots,f_n$ の共通零点のまわりの Grothendieck 留数の和であるとする.

$f_1,\ldots,f_n$ の生成するイデアルを I と置くと, $K_{\mathcal{F}}(\varphi)-\varphi\in I$ が成立することが知られている ([1, 3, 12]). 今, $\varphi\in I$ とすると, 明らかに $K_{\mathcal{F}}(\varphi)=0$

*本研究は平成 14 年度住友財団基礎科学研究助成を受けている.
†tajima@ie.niigata-u.ac.jp
‡nakamura@math.ocha.ac.jp

となるので, $K_{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{O}_X/I$ から $\mathcal{O}_X/I$ への恒等写像を与える. 従って, 積分変換 $K_{\mathcal{F}}$ の積分核 $\frac{Q(x,y)}{f_1(x)\dots f_n(x)}$ はベクトル空間 $\mathcal{O}_X/I$ に対する再生核とみなすことができる.

論文 [4, 5] では, 代数的局所コホモロジー群の概念と D-加群の理論を用いてこの積分核を解析した. また, 論文 [5, 7] では, $f_1,\dots,f_n$ が多項式である場合を扱い, Hermite-Jacobi の積分変換を解析することで, Grothendieck 双対基底が構成可能となることを示し, 多変数剰余公式への応用について議論した. 本稿では, Grothendieck 双対基底を実際に構成するアルゴリズムについて論じ, 多変数剰余公式アルゴリズムへの応用について述べる.

2 再生核と代数的局所コホモロジー

$K=\mathbb{Q}$ 上の n 変数多項式環を $K[x]=K[x_1,\dots,x_n]$ と置く. n 個の多項式 $f_1(x),\dots,f_n(x)\in K[x]$ であり, 正規列 $F=\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$ を定めるものが与えられたとする. $f_1(x),\dots,f_n(x)$ の生成するイデアルを $I=\langle f_1(x),\dots,f_n(x)\rangle\subset K[x]$, その零点集合を $Z\subset X$ と置く.

多項式 $p(x)\in K[x]$ に対し, 変数 x に関する Grothendieck 留数

$$(\frac{1}{2\pi i})^n\int\cdots\int\frac{Q(x,y)}{f_1(x)\dots f_n(x)}\varphi(x)dx$$

を対応させる積分変換を考える. ここで, $Q(x,y)$ は,

$$f_j(x)-f_j(y)=\sum_{j=1}^{n}q_{ij}(x,y)(x_j-y_j)$$

が定める行列 $(q_{ij}(x,y))_{i,j}$ の行列式 $Q(x,y)=\det((q_{ij}(x,y))_{i,j})$ である.

多項式環 $K[x]$, $K[y]$ に項順序を一つ入れ固定する. ($K[x]$, $K[y]$ に入れる項順序は同じである必要はない. しかし, ここでは簡単のため, 同じ項順序を用いる.)

一般に, 多項式 g が与えられた時, イデアル I のグレブナ基底 $\mathrm{Gr}(I)$ による g の剰余をとることで, g の normal form $\mathrm{NF}_I(g)$ が定義される.

$$g-\mathrm{NF}_I(g)\in I$$

が成り立つ.

$E = \{b(y) \in K[y] \mid \mathrm{NF}_I(b) = b\}$ により, ベクトル空間 E を定め, $K[y]/I$ と同一視する. 今, E のベクトル空間としての基底 $\{b_1(y), \ldots, b_d(y)\}$ を一つ選び, 以下, 固定して考える.

$Q(x,y)$ の normal form をとり, 基底多項式 $b_1(y), \ldots, b_d(y)$ を用いて展開する. 各 $b_j(y)$ の係数多項式を $h_j(x)$ と置くと, $Q(x,y)$ の normal form は

$$\mathrm{NF}(Q(x,y)) = \sum_{j=1}^{d} h_j(x) b_j(y)$$

と表せる. これを用いて積分変換 K_F を

$$K_F(p)(y) = (\frac{1}{2\pi i})^n \int \cdots \int \sum_j \frac{h_j(x)p(x)}{f_1(x)\ldots f_n(x)} b_j(y) dx$$

で定める. 明らかに次が成立する.

Lemma 2.1 多項式 $p(x) \in K[x]$ に対し, 次が成り立つ.

(i) $K_F(p) \in E$
(ii) $(\frac{1}{2\pi i})^n \int \cdots \int \frac{Q(x,y)}{f_1(x)\ldots f_n(x)} p(x) dx - K_F(p)(y) \in I$

剰余空間 $K[x]/I$ をベクトル空間 E と同一視することで, 次の定理を得る.

Theorem 2.1 ([4, 5, 6]) 積分変換 $K_F : K[x]/I \to K[x]/I$ は恒等写像である.

積分変換 K_F の積分核 $K(x,y)$ に注目する.

$$\left[\begin{array}{c} h_j(x) \\ f_1(x)\ldots f_n(x) \end{array}\right] \in Ext^n_{K[x]}(K[x]/I, K[x])$$

となるので,

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{d} b_j(y) \left[\begin{array}{c} h_j(x) \\ f_1(x)\ldots f_n(x) \end{array}\right] \in K[y]/I \otimes Ext^n_{K[x]}(K[x]/I, K[x])$$

となる.

さて, Grothendieck 留数が定める次の pairing を思い出そう.

$$K[x]/I \times Ext^n_{K[x]}(K[x]/I, K[x]) \to K.$$

この pairing は Grothendieck 双対定理により, 非退化である. Hermite-Jacobi 積分 K_F は, この双対性を解析的に表現したものと理解することができる. すなわち, 次の定理を得る.

Theorem 2.2 ([4, 5, 6]) $\left\{\begin{bmatrix} h_j(x) \\ f_1(x)\ldots f_n(x) \end{bmatrix} \mid j=1,\ldots,d\right\}$ は, ベクトル空間 $E \cong K[x]/I$ の基底 $\{b_1(x),\ldots,b_d(x)\}$ に対する双対基底である.

3 再生核の計算代数解析

自然な写像

$$i : Ext^n_{K[x]}(K[x]/I, K[x]) \to H^n_{[Z]}(K[x])$$

を用いて

$$\sigma_F = i\left(\begin{bmatrix} 1 \\ f_1(x)\ldots f_n(x) \end{bmatrix}\right) \in H^n_{[Z]}(K[x])$$

と定める. この代数的局所コホモロジー類 σ_F を解析することから始める. そのためにまず, イデアル I の準素イデアル分解 $I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_\ell$ をとる. I の根基 $\sqrt{I}$ の素イデアル分解を $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_\ell$ とする. 但し, $\mathfrak{p}_\lambda$ は I_λ の定める素イデアル $\sqrt{I_\lambda}$ とする. I_λ の零点集合を $Z_\lambda = V(\mathfrak{p}_\lambda) \subset X$ とする. $\sigma_F \in H^n_{[Z]}(K[x])$ は台の直和分解 $Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_\ell$ に応じて,

$$\sigma_F = \sigma_{Z_1} + \cdots + \sigma_{Z_\lambda} + \cdots + \sigma_{Z_\ell}$$

と分解することができる. 但し, $\sigma_{Z_\lambda} \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ である.

K 係数多項式を係数にもつ偏微分作用素から成る環 $K[x, \frac{\partial}{\partial x}]$ を D_X で表す. σ_{Z_λ} の Weyl 代数 D_X 上の annihilator イデアルを $Ann_{D_X}(\sigma_{Z_\lambda})$ と置く, i.e.,

$$Ann_{D_X}(\sigma_{Z_\lambda}) = \{P \in D_X \mid P\sigma_{Z_\lambda} = 0\}.$$

さらに, 左 D_X-加群 M_{σ_λ} を $M_{\sigma_\lambda} = D_X/Ann_{D_X}(\sigma_{Z_\lambda})$ で定める. この D_X-加群 M_{σ_λ} は Z_λ に台を持つホロノミック系であり, 各点 $\beta \in Z_\lambda$ において単純となることから, 次が従う.

Proposition 3.1 ホロノミック系 M_{σ_λ} の代数的局所コホモロジー解の次元は, その台 Z_λ の相異なる点の個数と等しい.

$$\dim_K Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) = \sharp Z_\lambda.$$

さて, $f_1,\dots,f_n$ の Jacobian $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ を J で表し, $J_\lambda = \mathrm{NF}_{I_\lambda}(J)$ とおく.

$$m_\lambda = \dim_K(K[x]/I_\lambda)/\dim_K(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda)$$

とする. Z_λ に台を持つ delta 関数を $\delta_{Z_\lambda} \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ と置く. 次が成立する.

Theorem 3.1 ([4, 5, 6]) ホロノミックな偏微分方程式系 $P\eta = 0, {}^\forall P \in Ann_{D_X}(\sigma_{Z_\lambda})$ を満たす代数的局所コホモロジー類 $\eta \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ であり, $J_\lambda\eta = m_\lambda\delta_{Z_\lambda}$ を満たすものは, σ_{Z_λ} のみである.

次に, $M_{\mathfrak{p}_\lambda} = D_X/D_X\mathfrak{p}_\lambda$ とおく. D_X-加群 M_{σ_λ} から D_X-加群 $M_{\mathfrak{p}_\lambda}$ への全ての D_X-準同型が作る空間 $Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ を考える. これは, 有限次元 K-ベクトル空間となる.

Lemma 3.1 次が成り立つ.

$$T \in Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda}) \Leftrightarrow PT \in D_X\mathfrak{p}_\lambda, {}^\forall P \in Ann_{D_X}(\sigma_{Z_\lambda}).$$

M_{σ_λ} が Z_λ の各点で単純であることから, 次の結果を得る.

Proposition 3.2 T_λ を K-ベクトル空間 $Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の要素で, 零でないものとする. このとき, 次が成立する.

$$Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) \cong \mathrm{Span}_K\{T_\lambda u\delta_{Z_\lambda} \mid u \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda\}.$$

証明. $Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ は右 D_X-加群の構造をもつことから,

$$Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda}) \cong \mathrm{Span}_K\{T_\lambda u \mid u \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda\}$$

が成り立つ. 一方,

$$Hom_{D_X}(M_{\mathfrak{p}_\lambda}, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) \cong \mathrm{Span}_K\{u\delta_{Z_\lambda} \mid u \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda\}$$

である. よって,

$$Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) \cong \mathrm{Span}_K\{T_\lambda u\delta_{Z_\lambda} \mid u \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda\}$$

を得る. □

特に, $\sigma_{Z_\lambda} = S_\lambda\delta_{Z_\lambda}$ なる微分作用素 S_λ も $u_\lambda \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$ を用いて $S_\lambda = T_\lambda u_\lambda$ と表されることになる. このような u_λ を求めるには, 次を用いる.

Lemma 3.2

$$\sigma_{Z_\lambda} = T_\lambda u \delta_{Z_\lambda} \Leftrightarrow J_\lambda T_\lambda u - m_\lambda \in D_X \mathfrak{p}_\lambda.$$

証明. $J_\lambda \sigma_{Z_\lambda} = m_\lambda \delta_{Z_\lambda}$ より, $(J_\lambda T_\lambda u - m_\lambda)\delta_{Z_\lambda} = 0$ を得る. $Ann_{D_X}(\delta_{Z_\lambda}) = D_X \mathfrak{p}_\lambda$ が成り立つので, $J_\lambda T_\lambda u - m_\lambda \in D_X \mathfrak{p}_\lambda$ を得る. □

$h_j(x)$ を零階の微分作用素とみなし, S_λ との積をとり $S_{\lambda,j} = h_j(x) S_\lambda$ と置く. $S_{\lambda,j}$ の形式随伴作用素を $K_{\lambda,j}$ と置くと,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{Z_\lambda}\left(\left[\frac{p(x)h_j(x)}{f_1(x)\dots f_n(x)}\right] dx\right) &= \mathrm{Res}_{Z_\lambda}(p(x)h_j(x)\sigma_{Z_\lambda} dx) \\
&= \mathrm{Res}_{Z_\lambda}(p(x)(S_{\lambda,j}\delta_{Z_\lambda})dx) \\
&= \mathrm{Res}_{Z_\lambda}(K_{\lambda,j} p(x) \delta_{Z_\lambda} dx) \\
&= \sum_{\beta \in Z_\lambda} (K_{\lambda,j} p)(\beta)
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_Z\left(\left[\frac{p(x)h_j(x)}{f_1(x)\dots f_n(x)}\right] dx\right) &= \mathrm{Res}_Z(p(x)h_j(x)\sigma_F dx) \\
&= \sum_{\lambda=1}^{\ell} \mathrm{Res}_{Z_\lambda}(p(x)h_j(x)\sigma_{Z_j} dx) \\
&= \sum_{\lambda=1}^{\ell} \sum_{\beta \in Z_\lambda} (K_{\lambda,j} p)(\beta)
\end{aligned}$$

を得る. $h_j \sigma_F \in H^n_{[Z]}(K[x])$ の定める線形汎関数の $p(x)$ への作用が偏微分作用素 $K_{\lambda,j}$ を用いて具体的に表現できたことになる.

4 双対基底と Noether 作用素

この節では, 論文 [8, 9] で導入したネター作用素の概念を復習し, 微分作用素 T_λ, S_λ, $S_{\lambda,j}$ の構成法について説明する.

準素イデアル I_λ を用いて, 左 D_X-加群 M_{I_λ} を $M_{I_\lambda} = D_X / D_X I_\lambda$ で定義する. M_{I_λ} から $M_{\mathfrak{p}_\lambda} = D_X / D_X \mathfrak{p}_\lambda$ への D_X-準同型全体のなす K-ベクトル空間を $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ と置く. $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ には右 D_X-

加群 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$ の構造が入る. $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の K-ベクトル空間としての次元は $\dim_K(K[x]/I_\lambda)$ に等しく, 右 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$-加群としての次元は

$$m_\lambda = \dim_K(K[x]/I_\lambda)/\dim_K(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda)$$

に等しい.

定義 ([9]) ベクトル空間 $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の右 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$-加群としての基底を, イデアル I_λ のネター作用素基底と呼ぶ.

D_X-加群 M_{σ_λ} は $Z_\lambda = V(\mathfrak{p}_\lambda)$ に台を持つホロノミック系であるので, $D_X I_\lambda \subset Ann_{D_X}(\sigma_{Z_\lambda})$ が成立する. 従って, $M_{\sigma_\lambda} = D_X/Ann_{D_X}(\sigma_{Z_\lambda})$ に対し,

$$0 \to Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda}) \to Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$$

なる単射が存在する.

今, $\{R_{\lambda,1}, \ldots, R_{\lambda,m_\lambda}\}$ を $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ のネター作用素基底とする. このとき, $T_\lambda \in Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ は,

$$T_\lambda = \sum R_{\lambda,k} t_k(x),\ t_k(x) \in K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$$

の形に一意的に表現できることになる. T_λ あるいは $\sigma_{Z_\lambda} = S_\lambda \delta_{Z_\lambda}$ を満たす S_λ を求めるには, あらかじめ, イデアル I_λ のネター作用素基底を計算しておくとよい. ネター作用素基底の構成アルゴリズムについては, 論文 [10] を参照されたい.

$h_j \sigma_{Z_\lambda} = S_{\lambda,j} \delta_{Z_\lambda}$ なる偏微分作用素 $S_{\lambda,j}$ は, 零階の微分作用素 $h_j(x)$ と $S_\lambda = T_\lambda u_\lambda$ の積として定義されている. $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ は左 $K[x]$-加群の構造ももつので, これらの偏微分作用素 $S_{\lambda,j}$ は, $Hom_{D_X}(M_{\sigma_{Z_\lambda}}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ には属さないが, $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ に属す. 従って $S_{\lambda,j}$ は, I_λ のネター作用素基底の右 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$-加群としての 1 次結合として表現できることになる.

5 アルゴリズムの概略

第 3 節で述べたことから明らかなように, 双対基底を求めるには,

(i) $Ann_{D_X}(\sigma_{Z_\lambda})$ の構成
(ii) $T_\lambda \in Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の構成

(iii) $\sigma_{Z_\lambda} = S_\lambda \delta_{Z_\lambda}$ なる作用素 $S_\lambda = T_\lambda u_\lambda$ の構成
(iv) 微分作用素 $h_j S_\lambda$ の計算

を行えばよいことになる.

前の節で示したように, 作用素 $S_{\lambda,j} = h_j S_\lambda$ は $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ に属する. また, $Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda}) \subset Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ も成立するので, T_λ も $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ に属する.

$Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ は右 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$-加群の構造をもつので, 右 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$-加群としての生成元 $R_{\lambda,1}, \dots, R_{\lambda,m_\lambda}$ をあらかじめ求め, 利用することで (ii), (iii), (iv) の計算を効率化することができる.

双対基底を求めるアルゴリズム 項順序 $\succ$ を一つ固定する. ベクトル空間 $E = \{b(x) \in K[x] \mid \mathrm{NF}_I(b) = b\}$ を求め, 基底 $\{b_1, \dots, b_d\}$ を与えておく. イデアル $I = \langle f_1, \dots f_n\rangle$ の準素イデアル分解 $I_1 \cap \cdots \cap I_\lambda \cap \cdots \cap I_\ell$ を求め,

(i) $\mathrm{NF}(Q(x,y)) = \sum b_j(x) h_j(y)$ を計算する.
(ii) σ_{Z_λ} の annihilator $Ann_{D_X}(\sigma_{Z_\lambda})$ を構成する ([11]).
(iii) $Hom_{D_X}(M_{I_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の右 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$-加群としての基底 $R_{\lambda,1}, \dots, R_{\lambda,m_\lambda}$ を求める ([10]).
(iv) $Hom_{D_X}(M_{\sigma_\lambda}, M_{\mathfrak{p}_\lambda})$ の右 $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$-加群としての生成元 T_λ を求める. $T_\lambda = \sum R_{\lambda,k} t_k(x)$
(v) $J_\lambda T_\lambda u_\lambda = m_\lambda \mod D_X \mathfrak{p}_\lambda$ を解くことにより $\sigma_{Z_\lambda} = S_\lambda \delta_{Z_\lambda}$ を満たす $S_\lambda = T_\lambda u_\lambda$ を求める.
(vi) 微分作用素の合成 $S_{\lambda,j} = h_j S_\lambda$ を計算し, $S_{\lambda,j} = \sum_k R_{\lambda,k} c_{j,k}(x)$ なる表示を求める.

$\tau_j = \sum_\lambda \sum_k R_{\lambda,k} c_{j,k} \delta_{Z_\lambda}$ と置く. $\tau_j \in i(Ext^n_{K[x]}(K[x]/I, K[x])) \subset H^n_{[Z]}(K[z])$ であり, $\{\tau_1, \dots, \tau_d\}$ はベクトル空間 $K[x]/I$ の基底 $\{b_1, \dots, b_d\}$ の双対基底である.

6 剰余公式への応用

多項式環 $K[x]$ に項順序を入れ, ベクトル空間

$$E = \{b(x) \in K[x] \mid \mathrm{NF}_I(b) = b\}$$

の基底 $\{b_1, \ldots, b_d\}$ を一つ選ぶ. このとき, 与えられた多項式 $p(x)$ のイデアル I による剰余 $p(x) \mod I$ は, $\mathrm{NF}_I(p)$ を取ることで,

$$\mathrm{NF}_I(p)(x) = \sum a_j b_j(x)$$

の形に一意的に表現される. $\{b_1, \ldots, b_d\}$ の双対基底 $\{\tau_1, \ldots, \tau_d\}$ を用いると, この係数 a_j は, $a_j = \mathrm{Res}_Z(p(x)\tau_j dx)$ により与えられる. 代数的局所コホモロジー類 τ_j は, イデアル I_λ のネター作用素基底 $\{R_{\lambda,1}, \ldots, R_{\lambda,m_\lambda}\}$ を用いて,

$$\tau_j = \sum_\lambda \sum_k R_{\lambda,k} c_{j,k}(x) \delta_{Z_\lambda}$$

と表される. 今, $R_{\lambda,k}$ の形式随伴作用素を $L_{\lambda,k}$ と置くと,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{Z_\lambda}(p(x) R_{\lambda,k} c_{j,k}(x) \delta_{Z_\lambda} dx) &= \mathrm{Res}_{Z_\lambda}(c_{j,k}(x)(L_{\lambda,k}p)(x)\delta_{Z_\lambda} dx) \\
&= \sum_{\beta \in Z_\lambda} c_{jk}(\beta)(L_{\lambda,k}p)(\beta)
\end{aligned}$$

が成立するので,

$$\begin{aligned}
a_j &= \mathrm{Res}_Z(p(x)\tau_j dx) \\
&= \sum_\lambda \mathrm{Res}_Z(p(x) \sum_k R_{\lambda,k} c_{j,k}(x) \delta_{Z_\lambda} dx) \\
&= \sum_\lambda \sum_{\beta \in Z_\lambda} c_{jk}(\beta)(L_{\lambda,k}p)(\beta)
\end{aligned}$$

を得る.

参考文献

[1] C. A. Berenstein and B. A. Taylor, *Interpolation problems in C^n with applications to harmonic analysis*, J. d'Analyse Math. **38** (1980), 188–254.

[2] J. P. Cardinal and B. Mourrain, *Algebraic approach of residues and applications*, in Proc. AMS-SIAM Summer Seminar on Math. of Numerical Analysis, Park City, Utah, Lectures in Applies Mathematics **32** (1996), 189–210.

[3] D. C. Struppa, The Fundamental Principle for Systems of Convolution Equations, Memoirs of the AMS **273**, 1983.

[4] 田島慎一, Hermite-Jacobi の多変数補間積分, 数理解析研究所講究録.

[5] 田島慎一, Grothendieck duality の計算と多変数 Hermite 補間問題, 京都大学数理解析研究所講究録 1085 「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 82–90.

[6] S. Tajima, *Grothendieck duality and Hermite-Jacobi formula*, Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, Lecture Notes in Pure and Applied Math. 214, Dekker, 503–509 (2000).

[7] 田島慎一，代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L. Ehrenpreis の Noether 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録 1138「数式処理における理論と応用の研究」(2000), 87–95.

[8] 田島慎一, 確定特異点型ホロノミック系の零次元代数的局所コホモロジー解, 京都大学数理解析研究所講究録 1336 「双曲型方程式と非正則度」(2003), 121–132.

[9] 田島慎一, 零次元イデアルのネター作用素について, 京都大学数理解析研究所講究録 「方程式系の超局所解析と漸近解析」, 掲載予定.

[10] 田島慎一, 零次元準素イデアルの Noether 作用素とホロノミック D-加群, 京都大学数理解析研究所講究録「Computer Algebra-Design of Algorithms,Implementations and Applications」, 掲載予定.

[11] 田島慎一, 中村弥生, 零次元代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック D_X-加群, 京都大学数理解析研究所講究録 「超局所解析の展望」, 掲載予定.

[12] A. K. Tsikh, Multidimensional Residues and Their Applications, Translations of Mathematical Monograph, **103**, AMS (1992).